Übungsstunde 8:

Themen heute:

- Normierte Vektorräume
- Skalarprodukte in lin. Räumen
- Orthogonalprojektion
- Orthonormalbasis (ONB)
- Gram-Schmidt

Nachbesprechung Midterm Aufgabe 4:

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_k$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_4$ in sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad \mathcal{P}_4 &\longrightarrow \mathcal{P}_4 \\ f(t) &\longmapsto t f'(t) + \tfrac{1}{t}\int_0^t f(s)ds \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(ap+q) = a\mathcal{F}(p) + \mathcal{F}(q)$ für alle $p, q \in \mathcal{P}_4$ und $a \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Polynome $1-t$, $2t$, $2+3t-t^2$, $4t^3$ eine Basis in $\mathcal{P}_4$ bildet.

c) Seien $\mathbf{x}$ und $\tilde{\mathbf{x}}$ die Koordinaten eines Elements aus $\mathcal{P}_4$ in der Monom- und in der oberen neuen Basis. Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{C}$, die man bei der Koordinatentransformation von der standard Basis aus Monomen in die obere neue Basis braucht, d.h. $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

x monom

$\tilde{x}$ neu

$Cx = \tilde{x}$

$$\mathcal{F}: \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$$
$$f(t) \mapsto t \cdot f'(t) + \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds$$

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(ap+q) &= \mathcal{F}(ap(t)+q(t)) \\ &= t\cdot(ap(t)+q(t))' + \frac{1}{t}\int_0^t ap(s)+q(s)\,ds \\ &= a\cdot t\cdot p'(t) + tq'(t) + \frac{a}{t}\int_0^t p(s)\,ds + \frac{1}{t}\int_0^t q(s)\,ds \\ &= a\left(tp'(t) + \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,ds\right) + tq'(t) + \frac{1}{t}\int_0^t q(s)\,ds \\ &= a\,\mathcal{F}(p) + \mathcal{F}(q) \quad \square \end{aligned}$$

b) $1 =$ $(1-t)$ $(2t)$ $(2+3t-t^2)$ $(4t^3)$

$t =$

$t^2 =$

$t^3 =$

$$1-t = 1\cdot 1 - 1\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$2t = 0\cdot 1 + 2\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2+3t-t^2 = 2\cdot 1 + 3\cdot t - 1\cdot t^2 + 0\cdot t^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4t^3 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + 4\cdot t^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Gaussen} \rightarrow$$

Volle Rang
$\Rightarrow$ lin. unabh.
& 4 Vektoren für
4 dimensionaler
Raum $\Rightarrow$ <u>Basis</u>

c)

$1 =$ $(1-t)$ $(2t)$ $(2+3t-t^2)$ $(4t^3)$

$t =$

$t^2 =$

$t^3 =$

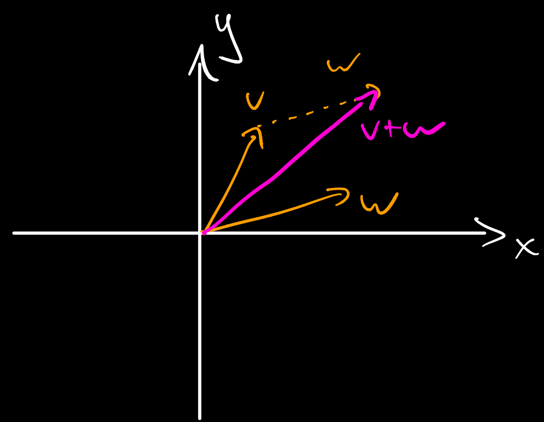
Normierte Vektorräume: $V = \{ V, \|\cdot\| \}$

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

(i) $\forall v \in V: \quad \|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (semi-positive Definitheit)

(ii) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (Linearität ggü. Skalarmulti.)

(iii) $\forall v, w \in V: \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)



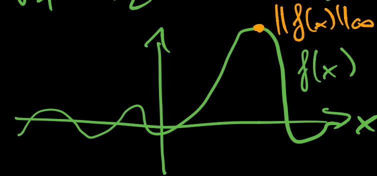
$\to$ Norm ist <u>keine</u> lineare Abbildung!

$$f(\alpha x + y) \overset{?}{=} \alpha f(x) + f(y)$$

$$\|\alpha x + y\| \leq |\alpha| \, \|x\| + \|y\|$$

Bsp. 8.1: $\|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}, \; \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \longmapsto \|\underline{v}\|_2 = \sqrt[2]{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

Bsp. 8.2: $\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}, \; \underline{v} \longmapsto \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{ |v_i| \}$

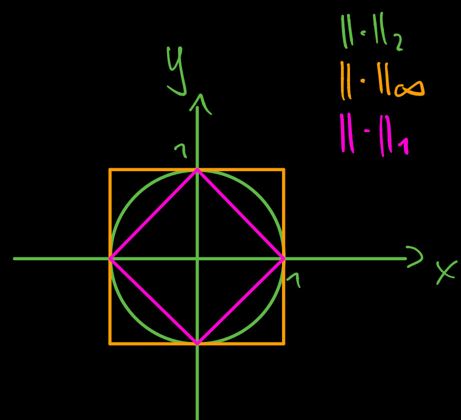


Bsp. 8.3: $\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}, \; \underline{v} \longmapsto \|\underline{v}\|_p = \sqrt[p]{v_1^p + v_2^p + \ldots + v_n^p}$

$$\|\cdot\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{v_1^p + \ldots + v_n^p} = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

Kreis im $\mathbb{R}^2$ in den verschiedenen Normen:

$$K = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x}\| = 1 \}$$



Theorem: Alle Normen sind äquivalent!

$$\exists c, C \in \mathbb{R}: \quad c \cdot \|\cdot\|_a < \|\cdot\|_b < C \|\cdot\|_a \qquad \forall \|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$$
$c < C$

Skalarprodukten in linearen Räumen: $x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \ (a,b) \longmapsto \langle a, b \rangle$$

(i) $\langle x, \lambda y + z \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (Linearität in beiden Elementen)

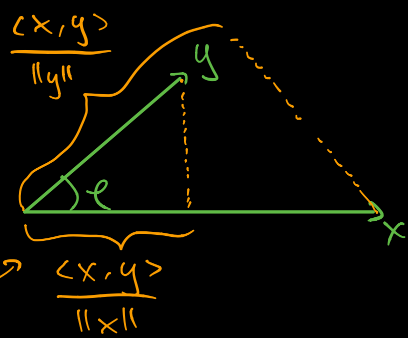
$\langle \lambda x + y, z \rangle = \ldots \qquad \langle \lambda x, \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$!

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (s.p.d.)

Induzierte Norm:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$



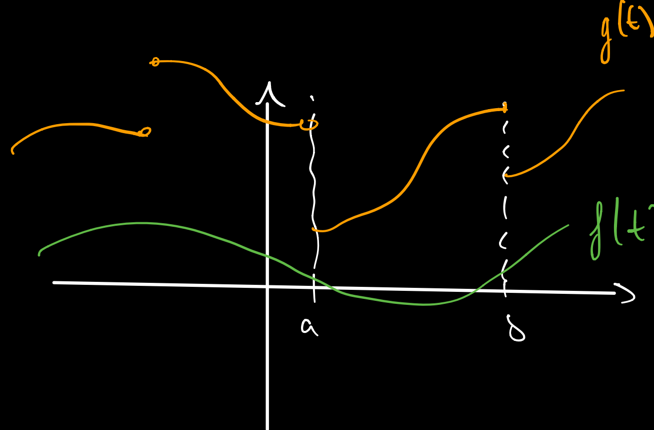
Bsp. 8.4: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_2 = \underline{x}^T \underline{y} = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cos \varphi$

$$\frac{\langle x, y \rangle_2}{\|x\|_2} = \|y\|_2 \cos \varphi$$

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_2 = \boxed{\underline{x}^T \underline{x} = \|x\|_2^2} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \|x\|_2$$

Bsp. 8.5: Im $C[a,b]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt$$



Orthogonalität: Ein Vektor x steht orthogonal auf y, falls

$$\boxed{\langle x, y \rangle = 0}$$

Bsp. 8.6: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{x} \geq 0 \quad \forall x \in V$

$\underline{\underline{A}}$ ist semi-positiv definit

$$\langle x, y \rangle_A = \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{y} = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$(*) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(i) \ \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} + \underline{z} \rangle_A = \underline{x}^T \underline{\underline{A}} (\lambda \underline{y} + \underline{z}) = \lambda \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{y} + \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{z}$$

$$= \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle \quad \square$$

$(ii) \ \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_A = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle_A$:

1. Mögl.: $\underline{y}^T \underline{\underline{A}} \underline{x} = [y_1 \ \ y_2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} (*)$

Explizite Berechnung ist meistens zu mühsam, aber möglich

2. Mögl.: $\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle = \underline{y}^T \underline{\underline{A}} \underline{x} = (\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{y})^T$

Skalarprodukt ist eine Zahl

$$\underline{\underline{A}} \text{ symm.} \quad = (\underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{y})^T = \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{y} = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \quad \square$$

$(iii) \ \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_A \geq 0$ und $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_A = 0 \iff \underline{x} = 0$

1. Mögl. $(*) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \geq 0 \quad \forall x$

$$= (x_1 - 2x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0 \quad \forall x \quad \square$$

2. Mögl. $\underline{\underline{A}}$ semi-positiv definit (s.p.d.) $\iff$ EW von $A \geq 0$

$\Rightarrow \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{x} \geq 0 \quad \forall x$, $\underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{x} = 0 \iff \underline{x} = 0$

Orthogonalprojektion: von $\underline{x}$ auf $\underline{y}$

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \underline{y}$$

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \underline{y}$$

Länge der orth. Projektion von $\underline{x}$ auf $\underline{y}$, aber gestreckt um den Faktor $\|\underline{y}\|$

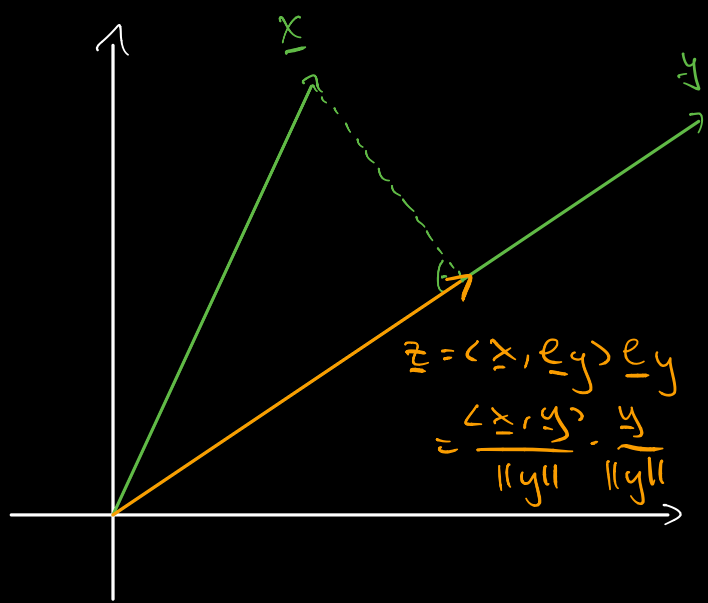
$\hookrightarrow \|\underline{y}\|^2 = \|\underline{y}\| \cdot \|\underline{y}\|$

$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$$= \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|} \cdot \frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}$$

Länge von $\underline{x}$ orth. auf $\underline{y}$ projeziert

$\underline{e}_y$, Einheitsvektor in Richtung $\underline{y}$



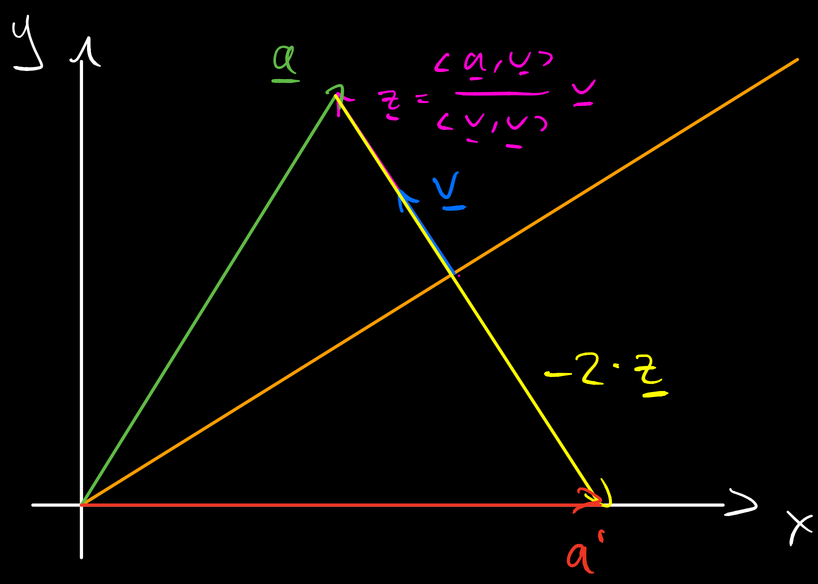
Orthogonalprojektor auf $\underline{y}$:

$$\underline{P}_y = \frac{\underline{y}\,\underline{y}^T}{\underline{y}^T \underline{y}}$$

Revisit Householdermatrix:

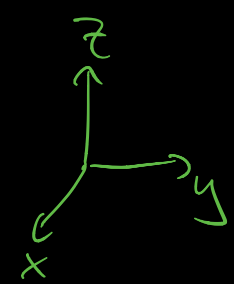
$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - 2\,\frac{\underline{v}\,\underline{v}^T}{\underline{v}^T\underline{v}} = \underline{\underline{I}} - 2\,\underline{u}\,\underline{u}^T \quad , \quad \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

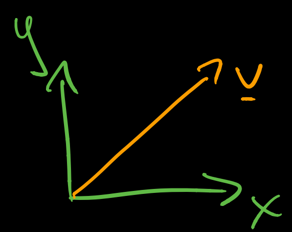
$$\underline{\underline{H}} \cdot \underline{x} = \underline{\underline{I}}\,\underline{x} - 2\,\frac{\underline{v}\,\boxed{\underline{v}^T\underline{x}}}{\underline{v}^T\underline{v}} = \underline{x} - 2\,\frac{\langle \underline{x}, \underline{v}\rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v}\rangle}\,\underline{v}$$

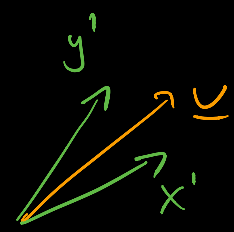


<u>Orthonormalbasis:</u> (ONB)

Bsp.: $\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}$ im $\mathbb{R}^3$







Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren: $B = \{b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)}\}$ eine Basis

(i) $\underline{e}^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $\underline{e}^{(2)'} = \underline{b}^{(2)} - \langle \underline{b}^{(2)}, \underline{e}^{(1)} \rangle \underline{e}^{(1)}$ & $\underline{e}^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $\underline{e}^{(3)'} = \underline{b}^{(3)} - \langle \underline{b}^{(3)}, \underline{e}^{(1)} \rangle \underline{e}^{(1)} - \langle \underline{b}^{(3)}, \underline{e}^{(2)} \rangle \underline{e}^{(2)}$

& $\underline{e}^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$